8 séquences pour résoudre des problèmes au cycle III

Situations expérimentées en cycle III
dans deux classes à cours multiples
de la circonscription d'Angoulême-Sud
à Bonnes CM1-CM2
et à Chavenat CE2-CM1-CM2

Sébastien MOISAN *Conseiller pédagogique Angoulême Sud*
Marie-Claire JOLLIVET *Professeur de Mathématiques*

Avant-propos

Nous avons construit une progression qui devrait permettre aux élèves de développer une attitude mathématique face à cette tâche complexe que constitue la résolution d'un problème.
Nous l'avons détachée de l'enseignement des techniques opératoires et de la numération car nous cherchons à casser une représentation de la résolution de problèmes, souvent bien installée chez les élèves, consistant à déterminer au plus vite la « bonne opération » à partir de quelques mots inducteurs de l'énoncé ou de l'opération juste étudiée en classe.
Ainsi, nous laissons à chaque enseignant le soin d'une programmation de l'ensemble des activités mathématiques.

Une organisation de notre enseignement autour de deux pôles :

- développer, expliciter l'exploration de l'énoncé écrit d'un problème
Dans ce premier pôle, une place importante a été réservée à la lecture en mathématiques. Lors de l'appropriation de l'énoncé, il s'agit de mettre en œuvre des compétences transversales de lecture mais aussi d'apprendre aux élèves à se placer dans un projet de lecture spécifique aux problèmes : « découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèses et de vérification pour produire une solution ». *(G. Vergnaud)*
Ainsi, nous avons mené, de façon dialectique, l'entraînement à l'élaboration d'une représentation précise de la situation décrite dans l'énoncé et la recherche de stratégies de résolution satisfaisant les contraintes annoncées. C'est dans cette perspective que nous avons adjoint une séquence de problèmes destinés à apprendre à chercher. Mais, pour pouvoir encourager le recours aux essais et aux contrôles en cours de résolution, il est indispensable de donner une large place au calcul mental dans l'ensemble des activités mathématiques de la classe.

- amener les élèves à construire et utiliser des répertoires de situations qui, à terme, donneront du sens aux opérations et rendront plus sûr le choix des procédures de résolutions.
Dans ce deuxième pôle, nous avons placé, au début de chaque séquence, une situation d'entrée forte, nommée « problème de référence » suivie de variations, concernant essentiellement le contexte et la taille des nombres.
Petit à petit, par un travail de comparaison collectif et individuel, nous cherchons à amener les élèves à dégager des invariants mathématiques pour identifier des catégories de problèmes et y classer des problèmes nouveaux. Le but ultime visé est la modélisation arithmétique de chacune des classes de problèmes abordées dans la progression.

Une centration de nos travaux sur les problèmes arithmétiques fondamentaux.

Pour déterminer le contenu de chacune des 8 séquences, nous avons considéré que les élèves de cycle 3 avaient déjà une expérience non négligeable dans le champ additif et qu'ils avaient rencontré quelques situations multiplicatives simples au CE1.
Ainsi, dès le début de l'année, pour réactiver les connaissances, des problèmes de transformations (additives ou négatives) et des problèmes de composition d'états, à une seule étape, sont proposés aux élèves sous forme de problèmes oraux, sans faire l'objet d'une séquence.
Les classes nouvelles que nous avons sélectionnées sont :

- la comparaison dans le champ additif
- les classes de problèmes liées à la proportionnalité simple et au produit de mesures dans le champ multiplicatif.

Il n'est bien évidemment jamais demandé aux élèves de retrouver stricto sensu ces classes de problèmes. Ils ont à établir des catégories propres au groupe classe de façon progressive. L'enseignant ravive et entretient régulièrement ces catégories en proposant des activités spécifiques au fur et à mesure de l'avancée de la progression :

- Création et résolution de problèmes d'une catégorie établie par le groupe classe.
- Tri de problèmes simples (à une étape) situés dans les catégories déjà étudiées.
- Résolution de problèmes complexes (à plusieurs étapes).

Une attention toute particulière au rebrassage des connaissances.

Pour permettre à la majorité des élèves de construire un apprentissage suffisamment solide et structuré, nous avons cherché à maintenir en relation d'une part les situations de référence et leurs variations et d'autre part les catégories de problèmes déjà étudiées.
Ce rebrassage des connaissances se produit déjà au moment des débats sur les procédures utilisées pour résoudre la situation de référence, mais nous l'avons systématisé dans des séances de production et de tri d'énoncés. Pour nous, ces problèmes inventés doivent être éprouvés, lors de leur résolution, par le groupe classe.
Ainsi, ces séances suscitent la créativité tout en faisant appel aux connaissances anciennes.
Pour renforcer la circulation des connaissances, des séances de résolution de problèmes complexes ont été placées dans chacune des séquences. En effet, résoudre un problème complexe consiste à sélectionner et organiser les informations de l'énoncé afin de concevoir des étapes et de planifier sa résolution. Nous incitons ainsi les élèves à réutiliser, à bon escient, les connaissances acquises pour des classes de problèmes abordées antérieurement. Remarquons que cette démarche difficile n'est envisageable avec la majorité des élèves que si les sous-problèmes afférents à la résolution ont déjà été rencontrés et si le contexte de l'énoncé leur est familier.

Un apprentissage de la rédaction de la solution différé du temps de résolution du problème.

Lors de la résolution des problèmes à une étape nous n'attendons pas un écrit prenant une forme très normée. Nous valorisons ici les écrits de recherche correspondant au travail privé de l'élève. Notre seule exigence est une phrase de réponse, dans les termes du problème, où l'unité de mesure de la grandeur en jeu est clairement indiquée.

Par contre, les problèmes complexes vont donner lieu à des solutions écrites plus structurées. En effet, certains de ces problèmes peuvent être résolus de plusieurs manières en concevant des étapes différentes. Après avoir résolu un tel problème les élèves vont chercher à communiquer leur planification et leurs résultats intermédiaires pour pouvoir comparer leurs démarches. Le travail de rédaction trouve alors tout son intérêt à ce moment là. Ce temps de production d'écrit est mené collectivement au CE2, puis progressivement de façon autonome au CM. Il ne s'agit pas de faire ce travail de rédaction pour tous les problèmes car l'attention des élèves ne doit pas être focalisée vers un objectif qui ne nous apparaît pas fondamental dans une progression pour apprendre à résoudre des problèmes au cycle3. Il nous paraît plus porteur de mener ce travail de rédaction approfondi à l'occasion de quelques problèmes complexes dans l'année.

Deux activités ritualisées au quotidien pour ancrer l'apprentissage :

- le calcul mental

Nous avons donné un rôle spécifique au calcul mental à deux moments clés de l'apprentissage :

- Avant de débuter une séquence, sans dévoiler le savoir en jeu, l'enseignant va pouvoir réactiver et entraîner par anticipation, des connaissances en calcul mental. Elles vont permettre aux élèves de relever, avec plus d'assurance, le défi que constitue un type nouveau de problèmes en facilitant la recherche de procédures adaptées.
- Au cours de la résolution d'un problème, l'élève doit décider d'une procédure et la mener à son terme de façon autonome. Pour cela, il doit avoir assez d'aisance avec les nombres et les calculs pour opérer des choix stratégiques et les contrôler sans perdre le fil de son raisonnement. Le calcul mental est indispensable pour entraîner cette prise de distance.

- les petits problèmes oraux

Des petits problèmes oraux, reprenant le format des problèmes déjà abordés et portant sur un domaine numérique très familier des élèves (de 0 à 20) sont résolus mentalement dans de brèves séances collectives quotidiennes. Notre intention est d'aller au-delà de la réponse et de faire retrouver la catégorie d'appartenance par comparaison avec les situations de référence déjà étudiées. Cela permet, tout au long de la progression, de stabiliser les répertoires déjà établis et de les conserver opérationnels. *(cf. annexe)*

De plus, l'extrême simplicité de l'énoncé et des données peut entraîner chez certains élèves et pour certaines catégories de problèmes un basculement du fonctionnement cognitif dont nous n'avons pas la clé : ils vont abandonner l'entrée dans le problème à partir de la représentation de l'énoncé pour une reconnaissance experte du modèle arithmétique sous jacent. Il s'agit bien d'un long processus d'apprentissage qu'il est illusoire de vouloir remplacer par un entraînement à la reconnaissance de mots inducteurs d'opérations.

Proposition d'organisation sur 4 semaines…

Nous prévoyons environ deux séances par semaine consacrées à la résolution de problèmes, une séance consacrée à la numération, une autre pour les opérations et une dernière pour la géométrie.

<table>
<tr><th>Des séances deux fois par semaine</th><th>Des activités ritualisées quotidiennes</th></tr>
<tr><td>Semaines 1 & 2

Séance 1
Présentation, explicitation approfondie de la situation de référence et résolution collective du problème de référence. (cf. diaporama)
L'énoncé de ce problème est affiché dans la classe.

Résolution individuelle d'un nouveau problème très proche de la situation de référence.

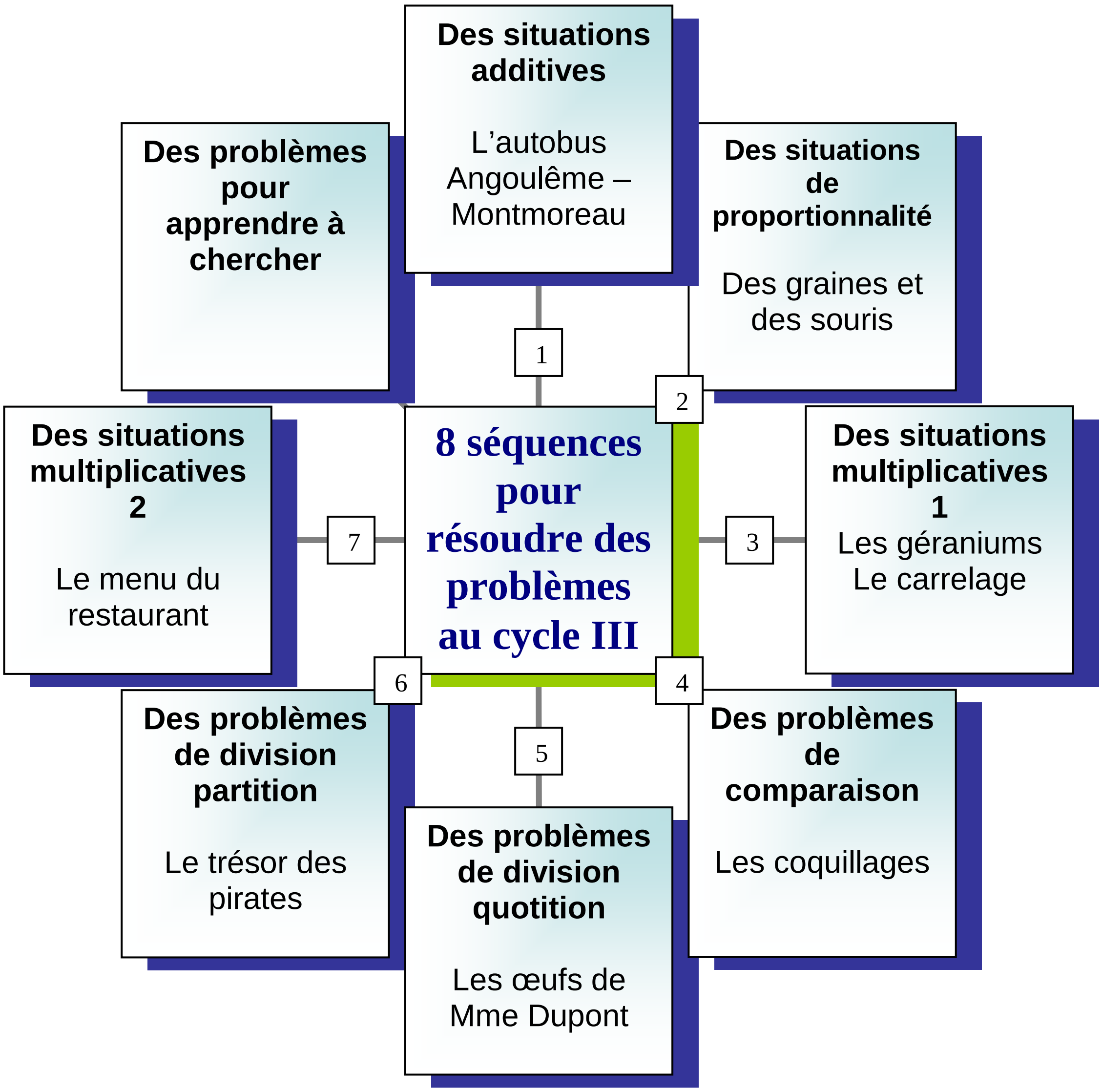
Séances 2, 3 & 4
Les enfants ayant résolu avec succès le problème de la séance précédente sont confrontés de manière autonome aux variations à partir du problème de référence.
Les autres élèves sont confrontés à un problème très proche de la situation de référence avec étayage du maître.</td><td rowspan="3">Calcul mental pour entraîner l'élève sur les calculs dont il va avoir besoin dans la catégorie de problèmes abordée actuellement.

Petits problèmes oraux dont le résultat est inférieur à 20. Ces problèmes portent sur l'ensemble des catégories déjà abordées, le but étant de « rebrasser » les connaissances pour aller vers la modélisation mathématique. (cf. annexe)</td></tr>
<tr><td>Semaine 3

Séance 5 (en différenciation)
▪ Résolution de « problèmes complexes » en lien avec les catégories de problèmes déjà abordées.
▪ Apprentissage de la rédaction de la solution d'un problème complexe.</td></tr>
<tr><td>Semaine 4

Séances 6 & 7
Retour sur les situations antérieures :
• tri de petits problèmes selon les catégories déjà abordées
• écriture d'énoncés se rapprochant d'une des situations de référence déjà abordées.
▪ résolution des problèmes inventés par les élèves

Le but de ces séances est de « rebrasser » toutes les situations mathématiques déjà vues.</td></tr>
</table>



Les séquences 2 et 4 peuvent être interverties dans la progression.

<u>Séquence 1 : Des situations additives…</u>

<u>Problème de référence :</u>

<u>L'autobus Angoulême – Montmoreau</u>

Un autobus part d'Angoulême à destination de Montmoreau.
Il fait un arrêt à Chadurie et un arrêt à Aignes.
30 passagers montent dans le bus à Angoulême.
A Chadurie, 12 passagers descendent et 6 passagers montent.
A Aignes, 3 passagers descendent et 8 passagers montent.
Combien de passagers arrivent à Montmoreau ?

<u>Variations à partir du problème de référence :</u>

1. L'autobus Paris Toulouse

Un autobus part de Paris à destination de Toulouse.
Il fait un arrêt à Limoges, un arrêt à Brive et un arrêt à Cahors.
40 passagers montent dans le bus à Paris.
A Limoges, 15 passagers descendent et 8 passagers montent.
A Brive, 12 passagers descendent et 3 passagers montent.
A Cahors, 11 passagers montent.
Combien de passagers arrivent à Toulouse ?

2. Libourne en train.

Un train part d'Angoulême à destination de Libourne. Il s'arrêtera en gare de Montmoreau et en gare de Chalais.
108 passagers montent à Angoulême.
A Montmoreau, 44 personnes descendent.
A Chalais, 30 personnes montent et 12 descendent.
Combien de passagers arrivent à Libourne ?

3. Ca monte et ça descend.

Un avion part de Paris à destination de Moscou (en Russie) avec une escale prévue à Berlin (en Allemagne) et une autre à Varsovie (en Pologne).
325 passagers embarquent à Paris. A Berlin, 28 passagers descendent de l'avion et 57 montent. A Varsovie, 41 passagers descendent et 35 montent.
Combien de passagers débarqueront à Moscou ?

4. Le manège.

Il y a un manège à la fête de Chalais. Le manège va tourner 4 fois.
A 15 heures, 27 personnes montent.
A 15H10, 10 personnes descendent et 5 personnes montent.
A 15H20, 3 personnes descendent et 12 personnes montent.
A 15H30, 7 personnes montent sur le manège.
Combien y a-t-il de personnes sur le manège à 15H27 ?

5. Le parking

A 8 heures, 263 voitures sont garées sur le parking du supermarché.
A 8 H 15, 73 voitures sont sorties et 48 sont entrées.
A 8 H 22, 73 sont entrées et 109 voitures sont sorties.
Combien de voitures sont garées dans le parking à 8 H 22 ?
Et à 8 H 17 ?

6. Varsovie en avion.

Un avion part de New York à destination de Varsovie. Il fait une escale à Paris et une escale à Berlin.
77 passagers embarquent à New York.
A Paris, 30 passagers descendent et 14 montent.
A Berlin, 27 passagers descendent et 25 montent.
Combien de passagers débarquent à Varsovie ?

7. Rome en avion.

Un avion part de New York à destination de Rome. Il fait une escale à Paris et une escale à Berlin.
279 passagers embarquent à New York.
A Paris, 46 passagers descendent et 21 montent.
A Berlin, 27 passagers descendent.
A Rome, tous les passagers descendent. Ils sont 248.
Combien de passagers sont montés à Berlin ?

8. Le bus

Un bus part d'Angoulême à destination de Bordeaux.
54 passagers embarquent à Angoulême.
A Montmoreau, 33 personnes descendent et 19 personnes montent.
A Chalais, le chauffeur du bus dépose 7 colis à la gare mais aucun passager ne monte ni ne descend.
A Libourne, 3 couples accompagnés de 3 enfants embarquent.
5 kilomètres avant Bordeaux, le bus s'arrête. Quelques personnes descendent.
A l'arrivée, les 37 passagers débarquent ravis de leur voyage.
Combien de personnes arrivent à Libourne ?
Combien de passagers sont descendus 5 kilomètres avant l'arrivée à Bordeaux ?

Des problèmes complexes pour aller plus loin au CM2:

L'équipement du sportif
Gaston a acheté un maillot à 17€ et un ballon.
Il a payé avec un billet de 50€, le vendeur lui a remis 8,60€.
Quel est le prix du ballon ?

Le voyage en Europe
Pour les vacances, la famille Capet a décidé de voyager en Europe.
Elle a loué un camping-car avec un forfait de 4000 km et elle prépare son itinéraire.
Ils vont partir d'Angoulême et aller à Vérone, Venise puis Salzbourg.
Ensuite ils envisagent deux possibilités :

- Les enfants aimeraient aller à Legoland au Danemark.
- Les parents préfèreraient aller à Amsterdam aux Pays-Bas.

Pour le retour à Angoulême, ils sont d'accord pour passer par Bruxelles.
Voici le tableau des distances entre les villes :

Angoulême - Vérone	1050 km
Vérone - Venise	125 km
Venise - Salzbourg	1120 km
Salzbourg - Legoland	1200 km
Salzbourg - Amsterdam	865 km
Legoland - Bruxelles	865 km
Amsterdam - Bruxelles	210 km
Bruxelles - Angoulême	750 km

Laquelle des deux possibilités doivent-ils choisir pour ne pas dépasser leur forfait ?

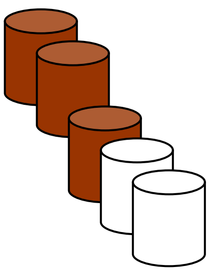
Séquence 8 : Des problèmes pour apprendre à chercher…

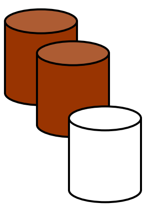
Ces problèmes visent principalement à permettre aux élèves de prendre des initiatives, d'organiser des essais, de formuler des hypothèses, et d'apprendre à les prouver.
Les enseignants pourront utiliser cette banque de problèmes à différents moments de l'année afin d'entretenir chez leurs élèves le plaisir de la recherche, du raisonnement et de l'imagination.

Une promenade en bateau.
Des groupes arrivent pour une promenade en bateau.
Voici le nombre de personnes par groupes :
25 – 50 – 65 – 70 – 85 – 100 – 45
Les personnes d'un même groupe ne veulent pas se séparer. Elles veulent monter dans le même bateau.
Un bateau peut transporter 150 personnes, pas une de plus.
Il y a 3 bateaux.
On voudrait savoir comment ces groupes vont s'organiser pour monter dans les bateaux ?

Le monte-charge.
Dans un magasin, on doit transporter des colis du rez-de-chaussée au premier étage avec un monte-charge.
On ne peut pas mettre plus de 225 Kg à la fois dans le monte-charge.
Voici les poids des colis à transporter :
75 Kg – 105 Kg – 125 Kg – 150 Kg – 70 Kg – 90 Kg – 40 Kg
Peut-on monter tous les colis en 3 voyages?

Le lait au chocolat
On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait.
Dans la recette A on mélange 3 parts de chocolat et 2 parts de lait.
Dans la recette B on mélange 2 parts de chocolat et 1 part de lait.

A


B


Quel est le mélange qui aura le plus goût de chocolat ? Explique pourquoi.

Annexe : Des exemples de petits problèmes oraux

Petits problèmes oraux à aborder à partir de la séquence 1 :

- **Transformation**
- J'avais 12 images. J'en ai gagné 8. Combien en ai-je maintenant ?
- J'avais 12 images. J'en ai perdu 5. Combien en ai-je maintenant ?
- Au jeu de l'oie, j'étais sur la case 12. J'ai avancé de 8 cases. Sur quelle case suis-je maintenant ?
- Au jeu de l'oie, j'étais sur la case 12. J'ai reculé de 5 cases. Sur quelle case suis-je maintenant ?

- J'avais 5 images. Un copain m'en a donné. J'en ai maintenant 12. Combien m'en a-t-il donné ?
- J'avais 18 images. J'en ai donné 12 à ma sœur. Combien en ai-je maintenant ?
- Au jeu de l'oie, je suis sur la case 5. Je veux aller sur la case 12. Combien dois-je faire avec le dé ?
- Au jeu de l'oie, j'étais sur la case 18. Je dois reculer de 12 cases. Sur quelle case vais-je arriver ?

- J'ai gagné 3 billes pendant la récréation. En rentrant en classe, j'en ai 12. Combien avais-je de billes avant la récréation ?
- J'ai perdu 5 billes pendant la récréation. En rentrant en classe, j'en ai 4. Combien avais-je de billes avant la récréation ?
- Au jeu de l'oie, j'étais sur une case. J'ai fait 3 avec le dé et je suis allé sur la case 12. De quelle case suis-je parti ?
- Au jeu de l'oie, j'étais sur une case. J'ai reculé de 5 cases. Je suis allé sur la case 4. De quelle case suis-je parti ?